ЛЕКЦИЯ № 16

Нелинейные колебания.

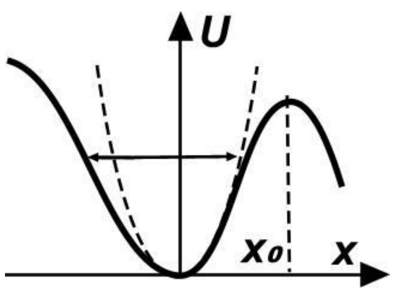
«Будущие фундаментальные физические теории будут, вероятно, основаны на нелинейных уравнениях»

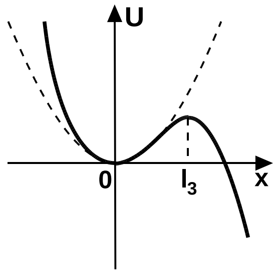
Э.Ферми

Так же, как традиционная физика начинается с рассмотрения гармонического осциллятора современная нелинейная физика начинается с рассмотрения ангармонического осциллятора и малых его колебаний. При этом в нелинейном случае термин «малые колебания» имеет смысл и обозначает колебания с амплитудами много меньшими характерного параметра размерности смещения, возникающего в нелинейной задаче. На рис.16.1 изображен потенциал достаточно произвольного вида, в котором допускаются колебания. Из рисунка видно, что из-за нелинейности потенциала возникает характерный размер x_0 такой, чтовозможны только колебания с амплитудами $x < x_0$. При этом колебания с амплитудами $x << x_0$ называются *малыми колебаниями*. Наличие малого параметра $x / x_0 << 1$ позволяет исследовать достаточно сложные задачи нелинейной механики. В предыдущих лекциях мы рассмотрели линейные колебания, но сталкивались и снелинейными колебаниями. Примером могут служить колебания математического маятника и двидение в кеплеровском потенциале. Ранее мы рассматривали качественные методы анализа нелинейных систем, но сейчас остановимся подробнее на задаче об одномерном движении материальной точки в нелинейном потенциале. В качестве простейшего примера рассмотрим так называемый *маятник Дюффинга*, описывающий одномерное движение в простейшем потенциале. В качестве таких потенциалов можно взять

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x^3 - \frac{\beta}{4}x^4 . \qquad (16.1)$$

Казалось бы, можно ограничиться только кубической добавкой, но мы покажем, что четверное слагаемое дает такой же вклад в динамику, что и кубический. Но мы рассмотрим влияние двух ангармонизмов отдельно. Соответствующие потенциалы изображены на Рис.16.2 и Рис.16.3.





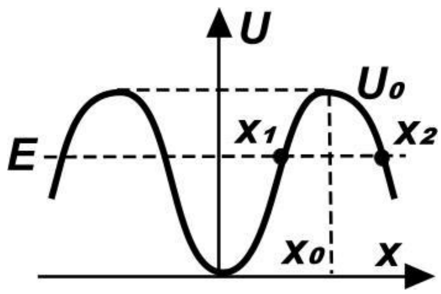


Рис.16.1 Рис.16.2 Рис.16.3

Исследование колебаний в потенциале $U = kx^2/2 - \beta x^4/4$ проще из-за его симметрии, поэтому начнем с него. График потенциала приведен на Рис.16.3, где $x_0 = \sqrt{k/\beta}$ и максимальная энергия $U_0 = k^2/4\beta$. Эта задача допускает точное аналитическое решение. Поскольку система консервативна, то из-за сохранения полной энергии

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 - \frac{\beta}{4}x^4 \tag{16.2}$$

решение можно представить в квадратурах:

$$t = \frac{x_0}{\omega_0}\sqrt{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - x_1^2\right)\left(x^2 - x_2^2\right)}}, \tag{16.3}$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – частота гармонических колебаний, а нелинейные колебания происходят между точками поворота $\pm x_1$. Фигурирующий в (16.3) интеграл называется неполным эллиптическим интегралом первого рода. Он исследован в теории эллиптических функций и интегралов. Но при малых амлитудах колебаний (при малых энергиях $E/U_0 <<,1$) этот тнтеграл легко берется приближенно. При $x \sim x_1 << x_2$ можно приближенно представить $1/\sqrt{x_2^2 - x^2} \approx \left(1 + x^2/2x_2^2\right)/x_2$ и легко взять получающиеся табличные интегралы:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}\frac{x_0}{x_2}\left(\left(1 + \frac{x_1^2}{4x_2^2}\right)\arcsin\frac{x}{x_1} - \frac{x\sqrt{x_1^2 - x^2}}{4x_2^2}\right), \tag{16.4}$$

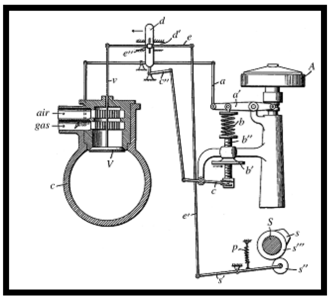
Это решение можно приближенно записать в виде

$$\frac{x}{x_0} \approx \sqrt{\frac{E}{2U_0}}\sin\left(\left(1 - \frac{3}{16}\frac{E}{U_0}\right)\omega_o t\right) = a\sin(\omega t), \qquad \omega = \omega_o\left(1 - \frac{3}{8}a^2\right). \tag{16.5}$$

Из приведенного решения видно, что частота колебания понижается с ростом амплитуды. (Такая нелинейность называют *мягкой*). Решение (16.5) представляет собой первый член разложения точного решения (16.3) в ряд по малому параметру $\omega_1/\omega_2 \sim \sqrt{E/U_0} \sim a \ll 1$, т.е. по амплитуде колебания. Но получение такого разложения из (16.3) довольно громоздкая процедура. Легче найти такое разложение, исходя из исходного уравнения для этой системы

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3, \qquad \varepsilon = \beta / m. \tag{16.6}$$

Это уравнение в нелинейной механике носит имя Георга Дюффинга, который предложил его для описания движения модифицированного двигателя внутреннего сгорания, приведенного на рисунке.



Мы специально перенесли нелинейное слагаемое в правую часть, чтобы подчеркнуть, что нелинейное слагаемое можно рассматривать в качестве возмущения. Прежде всего рассмотрим эту систему качественно на фазовой плоскости переменных $(x, \dot{x})$. Она приведена на Рис.16.5. (На Рис.16.4 изображен фазовый портрет маятника Дюффинга с кубической нелинейностью).

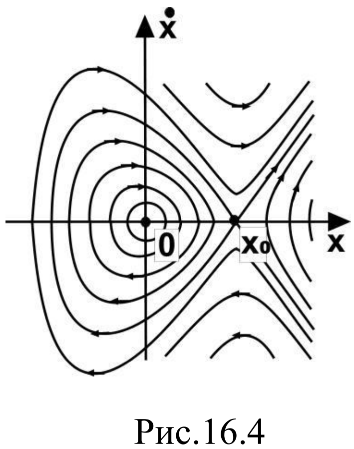


Рис.16.4

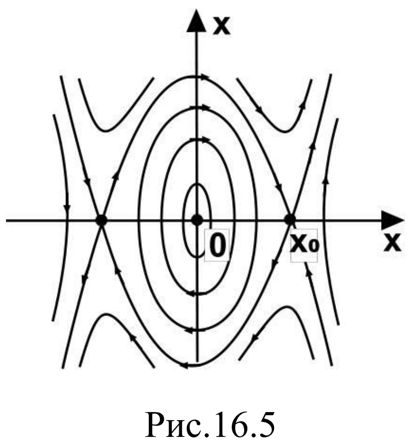


Рис.16.5

Из Рис.16.5 видно, что колебаниям соответствуют замкнутые траектории между особой точкой типа центр и сепаратрисой, соединяющей седла в точках $x = \pm x_0$. Движение по сепаратрисе происходит за бесконеыное время. Поэтому при энергиях, близких к U_0 фазовые траектории проходят близко к сепаратрисе и премя прохождения большое и стремится к бесконечности при $E \to U_0$. Поэтому качественно можно восстановить зависимость частоты колебания от его энергии – рис.16.6.

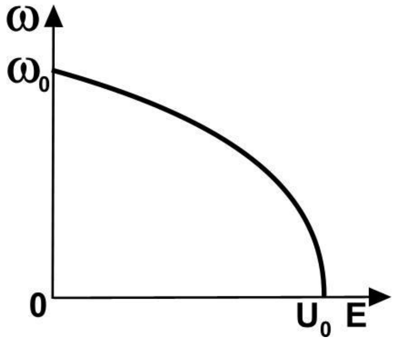


Рис.16.6

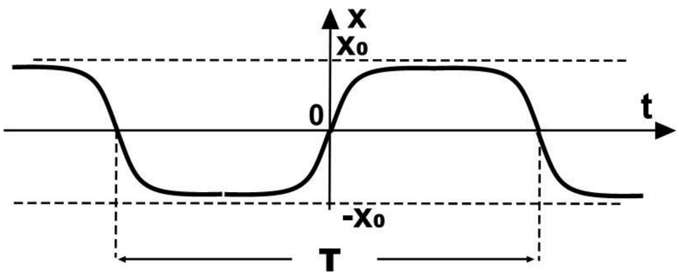


Рис.16.7

Кроме того, из Рис.16.5 видно, что при произвольных частотах решение остается периодическим. При этом при $E \approx U_0$ изображающая точка быстро (за время $\sim 1/\omega_0$) проходит между областями, близкими к седловым точкам, а возле них находится большое время. Поэтому можно восстановить и качественный вид зависимости координаты от времени: Рис.16.7.

Но аналитически при малых энергиях можно восстановить с любой точностью в виде степенных рядо по малому параметру, которым является амплитуда колебания. Наиболее простой – метод прямого разложения. Возьмем решение невозмущенного (линейного) уравнения (16.6) $x = a\cos\omega_0 t$ и представяя решение (16.6) в виде $x = a\cos\omega_0 t + X$, подставим его в правую часть. Считая параметр ε малым, найдем малые добавки X, для которых имеем уравнение

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \varepsilon a^3\left(\frac{3}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega_0 t)\right). \qquad (16.7)$$

Это уравнение можно рассматривать в качестве уравнения гармонического осциллятора с собственной частотой ω_0 под действием вынуждающей силы, Причем, первое слагаемое имеет вид резонансной силы. Как было показано раньше в задаче о параметрическом резонансе, при этом амплитуда нарастает линейно со временем. Действительно, легко проверить, что решение уравнения (16.7) имеет вид

$$X = \varepsilon a^3 \frac{3}{8} t \sin\omega_0 t - \varepsilon a^3 \frac{1}{32}\cos(3\omega_0 t). \qquad (16.8)$$

Первое, расходящееся слагаемое носит названеи *секулярного члена*. Появившаяся расходимость носит формальный характер. (Из Рис.16.5 видно, что никаких расходящихся членов в решении нет). Действительно, решение (16.8) вместе с основным приближением можно переписать в виде

$$x = a\left(\cos\left(\omega_0\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon a^2\right)t\right)-\frac{1}{32}\varepsilon a^2\cos(3\omega_0 t)\right). \tag{16.9}$$

Таким образом, мы видим, что решение является периодическим, но с нелитнейно сдвинутой частотой. Этот сдвиг пропорционален квадрату амплитуды и совпадает с полученным выше из точного решения выражением. Кроме ого, видно что параметр ε является условным малым параметром: истинный параметр разложения $a \ll 1$. Второе слагаемое в (16.9) описывает отклонение решения от чисто гармонического и соответствует разложению истинного профиля решения (Рис.16.7) во временной ряд Фурье. Учитывая этот результат, можно сразу получить основной результат, воспользовавшись *резонансным приближением*, использованным в предыдущих лекциях. Представим решение в виде, функционально совпадающис с решением невозмущенного (линейного) уравнения, но с неизвестным параметром – частотой

$$x = a\cos(\omega t), \tag{16.10}$$

и, подставив его в (16.6), оставим в нем только слагаемые $\sim \cos(\omega t)$, При этом мы сразу получим основной результата: нелинейный сдвиг частоты:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\varepsilon a^2, \tag{16.11}$$

совпадающий с полученным выше. В случае $\varepsilon < 0$ на фазовом портрете нет сепаратрис, и качественные соображения о понижении частот осцилляций с амплитудой не проходят. Здесь надо пользоваться аналитическим подходом, получив соотношение (16.11) при $\varepsilon < 0$. Теперь с ростом амплитуды частота растет и такая нелинейность называется *жесткой*.

В случае с кубической нелинейностью уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^2, \qquad \varepsilon = \alpha / m, \tag{16.12}$$

также легко исследуется на фазовой плоскости (Рис.16.4). При приближении энергии к U_0, фазовая траектория приближается к сепаратрисной петле, и период осцилляций стремится в бесконечность, а частота – к нулю. Т.е. сохраняется зависимость, изображенная на Рис.16.6. Причем, частота понижается (т.е. остается «мягкой») при любом знака параметра нелинейности ε. Но из-за отсутствия симметрии $x \to -x$ эта система сложнее, чем осциллятор Дюффинга с четверной нелинейностью. Резонансное приближение дает ответ для сдвига частоты тольео на втором шаге теории возмущения. Действительно, при подстановке в (16.2) решения в виде $x = a\cos\omega t$ и оставления только резонансных слагаемых мы получаем тривиальный результат $\omega = \omega_0$. Поскольку $\cos^2\omega t = (1+\cos 2\omega t)/2$, то решение надо сразу искать в виде

$$x = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t\,, \tag{16.13}$$

После подстановки (16.13) в (16.12) , оставлении только слагаемых с константой и первыми двумя гармониками, и занулении коэффициентом при них, получаем:

$$\omega_0^2 a_0 - \varepsilon a_1^2/2 - \varepsilon a_0^2 - \varepsilon a_2^2/2 = 0\,, \tag{16.14}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)a_1 - 2\varepsilon a_0 a_1 - \varepsilon a_2 a_1/2 = 0\,, \tag{16.15}$$

$$\left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right)a_2 - \varepsilon a_1^2/2 - \varepsilon a_0 a_2 = 0 \tag{16.16}$$

Для дальнейшего продвижения необходимо предположить некоторую иерерхию малости коэффициентов разложения Фурье (16.13). Оно очевидно: $a_1 >> a_0, a_2$. Более того, $a_0 \sim a_2 \sim a_1^2$. При этом уравнения (16.14,16.16) сводятся к такому:

$$a_0 = \varepsilon a_1^2/2\omega_0^2, \qquad a_2 = -\varepsilon a_1^2/6\omega_0^2\,. \tag{16.17}$$

Т.е. на первом шаге мы получаем соотношение амплитуд, и только на втором шаге процедуры, при подставлении (16.17) в (16.15) – результат для нелинейного сдвига частоты

$$\omega^2 = \omega_2^2 - \frac{5}{6}\frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}a_1^2\,. \tag{16.18}$$

Мы видим, что результат не зависит от знака параметра нелинейности ε и сдвиг частоты всегда отрицательный. Сравнение (16.18) с (16.11) показывает, что слагаемые с кубической и четверной нелинейностью дают о\вклад одного порядка $\sim a^2$.

Для оценки справедливости резонансного приближения вернемся к маятнику Дюффинга с четверным ангармонизмом. При подстановке в уравнение (16.6) решения в виде (16.10) в правой части уравнния возникало «лишнее» слагаемое, что указывает на то, что решение надо искать в виде

$$x = a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t). \tag{16.19}$$

Подставляя это выражение в (16.6), из коэффициентов при $\cos\omega t$ и $\cos 3\omega t$ получаем

$$a_3 = -\frac{3}{32}\frac{\varepsilon a_1^3}{\omega_0^2}, \tag{16.20}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\varepsilon a_1^2 - \frac{9}{128}\frac{\varepsilon^2 a_1^5}{\omega_0^2}. \tag{16.21}$$

Таким образом, добавки к резонансному приближению малы, что оправдывает его применение при малых амплитудах. Кроме того видно, что решене представляет собой разложение в ряд по истинному малому параметру $\alpha a_1^2 / \omega_0^2$. Удобно в качестве параметра разложения выбрать отщепление частоты нелинейного колебания от собственной частоты соответствующего линейного осциллятора $\mu = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$. Тогда решение уравнения (16.6) в виде асимптотического разложения по малому параметру имеет вид:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{2m} a_{2m+1,2n+2m+1} \cos((2n+1)\omega t). \tag{16.22}$$

Решение сохраняет такой вид для любого четного по смещениям потенциала. Но надо иметь в виду, что, увеличивая точность решения, надо с большей точностью выписывать и потенциал осциллятора. Однако, в некоторых случаях удается найти выражение для нелинейных колебаний с произвольными амплитудами.

Рассмотри динамику магнитного момента. Во внешнем магнитном поле она описывается уравнением Блоха $d\vec{M} / dt = g[\vec{M}\vec{H}]$, где $\vec{H}$ – внешнее магнитное поле. Поскольку $\vec{H} = -\partial E_z / \partial \vec{M}$, где E_z – зеемановская энергия, то Ландау и Лифшиц предложили обобщение уравнения Блоха

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -g\left[\vec{M}\,\frac{\partial E}{\partial \vec{M}}\right], \tag{16.23}$$

где энергия E может включать в себя и другие виды взаимодействия магнитного момента. В частности, это может быть энергия взаимодействия с электрическим полем окружающих магнитный ион атомов. Такая энергия (энергия одноионной анизотропии) имеет релятивистское происхождение и в простейшем случае имеет вид $E_a = -\beta\left(\vec{M}\vec{n}_z\right)^2/2$, где $\vec{n}_z$ – единичный вектор вдоль выделенной оси Z («легкой оси» при $\beta > 0$.

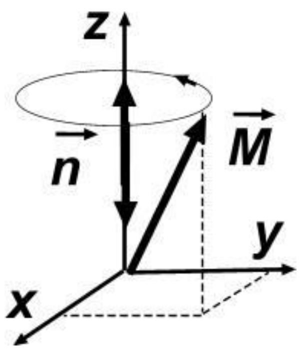


Рис.16.8

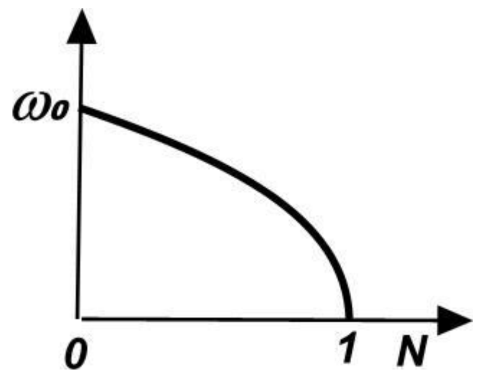


Рис.16.9

Для комплексной величины $\psi = M_x + iM_y$ уравнение Ландау-Лифшица принимает вид

$$i\dot{\psi} = \omega_0 \psi \sqrt{1 - \psi\overline{\psi}} \qquad (16.24)$$

с $\omega_0 = g\beta$. Решение этого уравнения $\psi = a\exp(-i\omega t)$ легко находится и задает нелинейный сдвиг частоты во всй области существования амплитуды $|\psi| \le 1$:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}\ . \qquad (16.25)$$

Он изображен на Рис.16.9.